МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
НАЦИОНАЛНА КОМИСИЯ ЗА ОРГАНИЗИРАНЕ НА ОЛИМПИАДАТА ПО АСТРОНОМИЯ

XXI НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО АСТРОНОМИЯ

http://astro-olymp.org

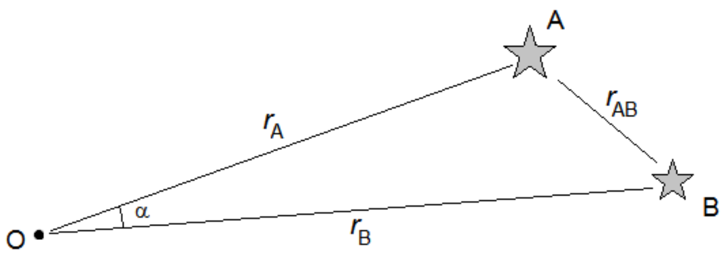
II кръг, 24 февруари 2018 г.
Ученици от 11-12 клас – решения

1 задача. Опашки. На Фиг. 1 виждате съзвездието Голяма мечка. До всяка звезда от опашката на мечката е дадено разстоянието, на което тя се намира от нас в светлинни години. Дадени са и ъгловите разстояния между звездите.

- А) Определете действителната дължина на опашката на Голямата мечка в светлинни години.
- Б) Според вас коя опашка е по-дълга в светлинни години – опашката на Голямата мечка или на Малката мечка? Обосновете вашия отговор.

Решение:

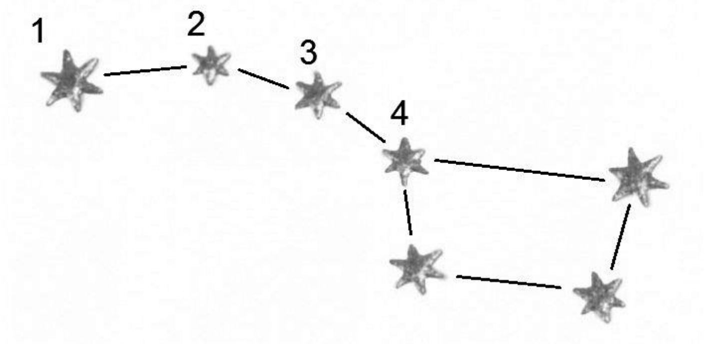
На схемата по-долу е показано пространственото разположение на земния наблюдател, означен с O, и две зведи, означени с A и B.



Известни са ни видимото ъглово разстояние между звездите α и разстоянията от нас до звездите, съответно r_A, r_B. Трябва да намерим разстоянието между двете звезди r_{AB}. Използваме косинусовата теорема:

$$r_{AB} = \sqrt{r_A{}^2 + r_B{}^2 - 2 r_A r_B \cos\alpha}$$

Така можем да пресметнем разстоянието в светлинни години между всеки две последователни звезди от опашката на Голямата мечка. Номерираме звездите, както е показано на следващата схема.



След това получаваме:

$$r_{12} \approx 28 \text{ ly}$$
$$r_{23} \approx 8 \text{ ly}$$
$$r_{34} \approx 8 \text{ ly}$$

Общата дължина на опашката ще бъде:

$$l = r_{12} + r_{23} + r_{34} = 44 \text{ ly}$$

Ъгловите разстояния между звездите от Малката мечка са по-малки от разстоянията между звездите от Голямата мечка. Но нека си припомним някои сведения за тези звезди. Звездите от опашката на Голямата мечка са сравнително близо до нас. Същевременно те са сред ярките звезди в небето, повечето от звездна величина около 2^m. В края на опашката на Малката мечка е Полярната звезда, също от звездна величина около 2^m. Тя обаче е променлива от тип цефеида. Както е известно, цефеидите са свръхгигантски звезди с огромна светимост. Следователно Полярната звезда е на значително по-голямо разстояние, отколкото са звездите от опашката на Голямата мечка. Останалите звезди от опашката на Малката мечка също трябва да са значително по-далечни от нас, тъй като са твърде слаби по блясък. Ето защо общата дължина на опашката на Малката мечка трябва да е по-голяма.

Критерии за оценяване (общо 15 т.):
За правилен метод на определяне на разстоянието между звездите – 2 т.
За верни числени резултати – 6 т.
За определяне на общата дължина на опашката – 1 т.
За разсъждения относно сравнението с опашката на Малката мечка – 4 т.
За верен краен извод – 2 т.

2 задача. Бяло джудже – пулсар. Променливата звезда AR Sco е открита преди около 40 години. Наскоро при детайлно изследване на нейната крива на блясъка се получават изненадващи резултати. Променливата се оказва двойна система от червено и бяло джудже. На Фиг. 2 е дадена схема на модела на системата, съставен от астрономите. Бялото джудже има необикновено поведение, подобно на пулсар. Около магнитните му полюси се ускоряват струи заредени частици до високи енергии. Магнитната му ос лежи приблизително в орбиталната равнина на системата и е почти перпендикулярна на оста на околоосното му въртене. Така периодично струите частици, изстрелвани от бялото джудже, попадат върху червеното джудже. Това повлиява цялата атмосфера на червеното джудже. На фиг. 3 е дадена кривата на блясъка на AR Sco. Светимостта на бялото джудже е несъществена в сравнение със светимостта на червеното джудже. Под кривата на блясъка е дадена крива на изменение на лъчевата скорост на червеното джудже. Орбиталният период на системата е 3.56 часа, а наблюдаваният период на кратковременните пулсации е 0.985 минути. Орбитите на компонентите са кръгови и зрителният лъч от земния наблюдател лежи в орбиталната равнина.

- А) Разгледайте внимателно фигурите и обяснете кривата на изменение на блясъка на AR Sco.
- Б) Определете периода на околоосно въртене на бялото джудже.
- В) Смята се, че бялото джудже има маса приблизително равна на масата на Слънцето. Определете масата на червеното джудже в слънчеви маси и разстоянието между двете компоненти.

Решение:

Както се вижда от модела на системата, при околоосното въртене на бялото джудже в определени моменти една от струите високоенергетични заредени частици, изстрелвани от неговите околности, попада върху червеното джудже. Въздействието на струята води до краткотрайно усилване на блясъка на цялото червено джудже, но най-вече на областта от неговата атмосфера, където попада струята. Тази област се превръща в нещо като „горещо петно” с по-ярко излъчване. При орбиталното движение на системата „горещото петно” периодично се обръща към нас, земните наблюдатели.

На това се дължи плавното изменение на блясъка на системата с период, равен на орбиталния период T. Насложените върху кривата на блясъка краткопериодични импулси се дължат на непосредственото попадане на струите от бялото джудже върху червеното джудже. Струите, както се вижда от модела, са две. Следователно периодът между моментите, когато една и съща струя попада върху чвервеното джудже, е двойно по-голям от периода между краткотрайните повишения на блясъка:

$$P = 2 \times 0.985 \text{ минути} = 1.97 \text{ минути}$$

С P сме означили периода на околоосно въртене на бялото джудже. Но това не е действителният период, а наблюдаваният от нас период. За да намерим истинския период P_0, трябва да отчетем орбиталното движение на системата. Най-вероятно посоката на околоосно въртене на бялото джудже съвпада с посоката на орбитално движение. Тогава можем да напишем:

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{P_0} - \frac{1}{T}$$

Оттук намираме:

$$P_0 = \frac{TP}{T+P}$$

$$P_0 \approx 1.95 \text{ минути}$$

От кривата на лъчевата скорост на червеното джудже виждаме, че тя достига по абсолютна стойност до 300 км/с. Според условието на задачата орбитите на двете компоненти в системата са кръгови и зрителнията лъч от земния наблюдател лежи в орбиталната равнина. Можем да приемем, че това е реалната орбитална скорост v на червеното джудже около центъра на масите на двойната система. Нека означим с M_{WD} и M_{RD} масите на бялото и на червеното джудже, а с a_{WD} и a_{RD} – съответните разстояния на двете звезди до центъра на масите на системата. Разстоянието a_{RD} намираме от уравнението:

$$vT = 2\pi a_{RD}$$

$$a_{RD} = \frac{vT}{2\pi} \approx 612000 \text{ km}$$

По условие $M_{WD} = 1$ слънчева маса. За двете компоненти можем да напишем:

$$M_{RD} a_{RD} = M_{WD} a_{WD}$$

Въвеждаме следното обозначение:

$$k = \frac{M_{RD}}{M_{WD}} = \frac{a_{WD}}{a_{RD}}$$

Оттук получаваме:

$$M_{RD} = kM_{WD}$$
$$a_{WD} = ka_{RD}$$

Използваме третия закон на Кеплер:

$$\frac{(a_{WD} + a_{RD})^3}{T^2} = \frac{\gamma(M_{WD} + M_{RD})}{4\pi^2}$$

където γ е гравитационната константа. По-нататък пресмятаме:

$$\frac{{a_{RD}}^3(1+k)^3}{T^2} = \frac{\gamma M_{WD}(1+k)}{4\pi^2}$$

Оттук определяме:

$$k = \frac{T}{2\pi}\sqrt{\frac{\gamma M_{WD}}{{a_{RD}}^3}} - 1$$

$$k \approx 0.556$$

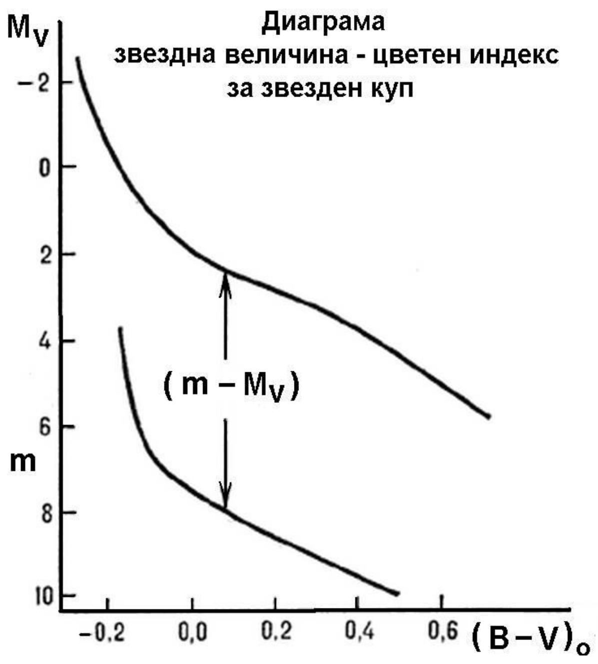
Накрая пресмятаме масата на червеното джудже и разстоянието a между двете компоненти:

$$M_{RD} \approx 0.56 \text{ слънчеви маси}$$
$$a = a_{WD} + a_{RD} \approx 950000 \text{ km}$$

<u>Критерии за оценяване (общо 15 т.):</u>
За обяснение на кривата на блясъка – 4 т.
При определяне на периода на околоосно въртене на бялото джудже:
За отчитане на факта, че струите са две – 1 т.
За отчитане на орбиталното движение – 3 т.
За верен краен резултат – 1 т.
За правилен теоретичен метод за определяне на масата на червеното джудже и разстоянието между компонентите – 4 т.
За вярно пресмятане на масата начервеното джудже – 1 т.
За вярно пресмятане на разстоянието – 1 т.

3 задача. Метод на куповете. Цветният индекс на една звезда представлява разликата между нейните звездни величини, измерени в два различни цвята. Често по хоризонталната ос на диаграмата на Херцшпрунг-Ръсел вместо температурата, или спектралния клас на звездите, се дава цветен индекс, който е функция на температурата. На фигурата по-долу диаграмата видима звездна величина – цветен индекс за звездите от един звезден куп (долната линия) е наложена върху диаграма на Херцшпрунг-Ръсел, построена за звезди с известна абсолютната звездна величина и цветен индекс (горната линия). Това ни позволява да намерим разликата между видимите и абсолютните звездни величини и да получим разстоянието до звездите от купа.

- А) Напишете формулата, чрез която можем да пресметнем това разстояние.



Част от светлината на звездите обаче, се поглъща в междузвездното пространство и видимият им блясък намалява. Това трябва да се отчита при определяне на разстоянията до куповете.

- Б) За един звезден куп първоначално е определено разстояние 10 килопарсека. Това е направено при предположение, че пълното поглъщане на светлината при нейното преминаване по целия път от звездния куп до Земята е 80%. По-късно оценката на пълното поглъщане е променена на 50%.

Пресметнете разстоянието до купа с новата оценка на пълното поглъщане.

Решение: Записваме формулата, която дава връзката между видимата звездна величина на една звезда, абсолютната й звездна величина и разстоянието до нея:

$$m = M - 5 + 5\lg r$$

Изразяваме разстоянието:

$$r = 10^{0.2(m-M)+1}$$

Тази формула, обаче, е вярна само когато няма поглъщане на светлина в междузвездното пространство. Когато има поглъщане, видимата звездна величина е по-голяма поради това, че осветеността от звездата намалява. Ако A е общото поглъщане по целия път на светлината от звездата до горната граница на атмосферата на Земята, формулата придобива следния вид:

$$m = M - 5 + 5\lg r + A$$

Записана за логаритъма на разстоянието, изглежда така:

$$\lg r = 0.2(m - M - A) + 1 \qquad (1)$$

Разстоянието може да се представи по следния начин:

$$r = 10^{0.2(m-M-A)+1}$$

Общото поглъщане е удобно да се представи като добавка към видимата звездна величина m_0, неповлияна от поглъщането. Тогава, видимата звездна величина, повлияна от поглъщането означаваме с m_1 (в първия случай, при поглъщане 80%), и m_2 (във втория случай, при поглъщане 50%). Нека да изчислим добавката към звездната величина вследствие на поглъщането за двата случая:

$$A_1 = m_1 - m_0 = -2.5\lg\frac{E_1}{E_0} = -2.5\lg\frac{0.2E_0}{E_0} = -2.5\lg 0.2 \approx 1.75$$

$$A_2 = m_2 - m_0 = -2.5\lg\frac{E_2}{E_0} = -2.5\lg\frac{0.5E_0}{E_0} = -2.5\lg 0.5 \approx 0.75$$

Използваме формула (1) и за разликата на логаритмите на разстоянията получаваме:

$$\lg r_2 - \lg r_1 = 0.2(A_1 - A_2) = 0.2$$

$$\lg r_2 = \lg r_1 + 0.2 = 4.2$$

където r_1 = 10000 pc е първоначално определеното разстояние до купа, а r_2 е търсеното разстояние при новата оценка за общото поглъщане до купа. Антилогаритмуваме и за r_2 получаваме:

$$r_2 = 15848.9 \approx 15850 \text{ pc}$$

Критерии за оценяване (общо 15 т.):

За правилна формула, свързваща абсолютната и видимата звездна величина и разстоянието – 3 т.

За правилно обяснение и математическо представяне на зависимостта на видимата звездна величина от поглъщането – 4 т.

За правилна теоретична постановка на решението – 7 т.

За верен числен отговор – 1 т.

4 задача. Грешка при старта. На 6 февруари 2018 г. от космодрума Cape Canaveral в САЩ е изстреляна ракета, която извежда в орбита около Слънцето червения автомобил на видния изобретател и бизнесмен Elon Musk. Целта е автомобилът да достигне до Марс. Поради техническа неточност при началната маневра с ракетните двигатели вместо по орбита с разстояние до Слънцето в перихелий 0.99 AU (астрономически единици) и в афелий 1.7 AU, автомобилът тръгва по орбита с разстояние до Слънцето в перихелий 0.98 AU и в афелий 2.61 AU. Масата на автомобила заедно с астронавта манекен и оборудването е 1250 кг.

- А) Намерете орбиталния период на автомобила около Слънцето.
- Б) Разгледайте схемата на Фиг. 4. Направете необходимите пресмятания и означете положението на Земята по нейната орбита в момента, когато автомобилът на Elon Musk достигне афелия на своята орбита около Слънцето.
- В) Ако имаме достатъчно мощен телескоп, в кое съзвездие ще виждаме автомобила от Земята тогава?
- Г) С каква величина в повече от предвиденото е придадената на автомобила енергия от ракетните двигатели?

Решение:

Голямата полуос на орбитата на космическия автомобил е:

$$a = \frac{0.98 + 2.61}{2} = 1.795\ \mathrm{AU}$$

Орбиталния му период намираме от третия закон на Кеплер. Когато голямата полуос е изразена в астрономически единици, а периода в години, то третият закон на Кеплер може да се запише в следния опростен вид:

$$\frac{a^3}{T^2} = 1$$

Оттук намираме:

$$T = \sqrt{a^3}$$

$$T \approx 2.405\ \text{години}$$

Автомобилът ще достигне до афелия на своята орбита за време:

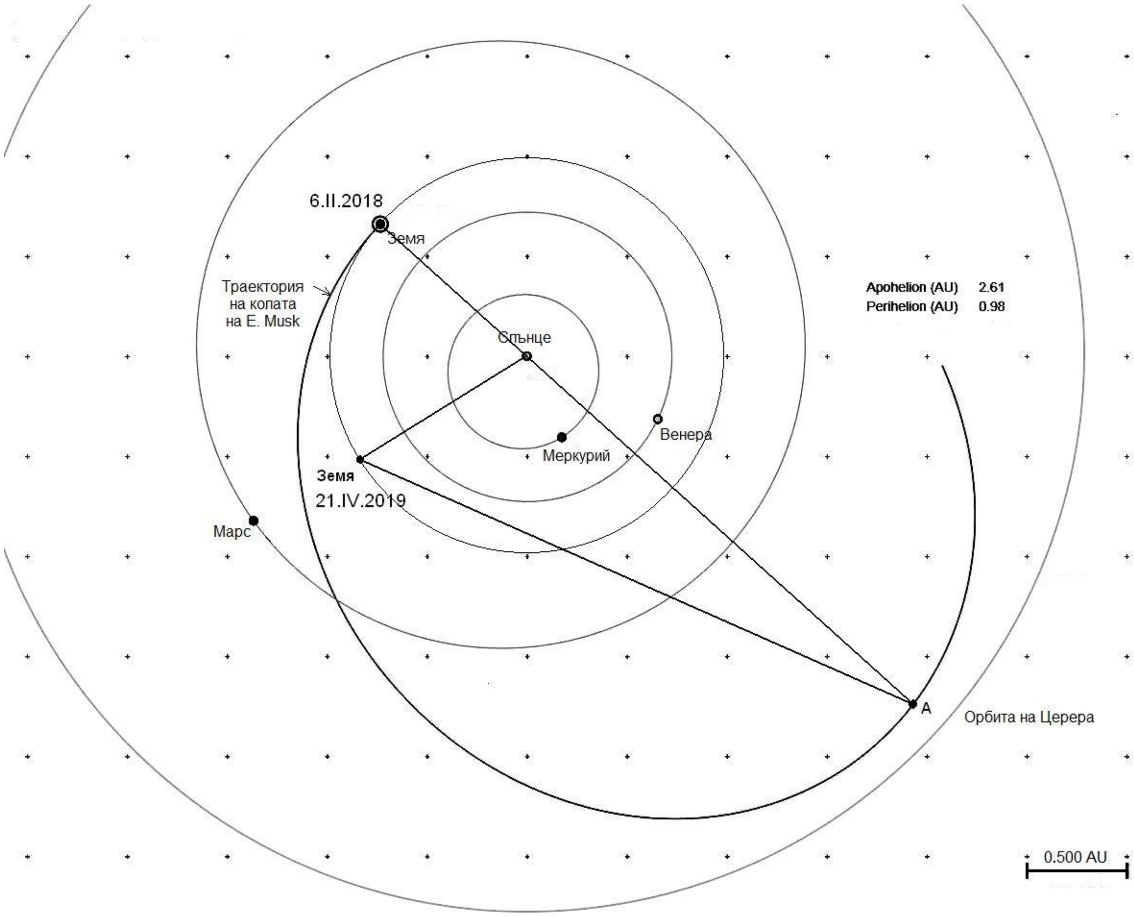
$$t = T/2 \approx 1.203\ \text{години}$$

За това време Земята ще направи една пълна обиколка по своята орбита и ще измине още 0.203 части от следващата обиколка. Това съответства на ъгъл на завъртане около Слънцето спрямо първоначалното положение:

$$0.203 \times 360° \approx 73°$$

Отмерваме с транспортир този ъгъл от положението на Земята на 6 февруари 2018 г. по посока на нейното обикаляне около Слънцето и получаваме новото положение на Земята в момента, когато космическият автомобил е в своя афелий в точка А на схемата.

Датата, на която ще се случи това, е $0.203 \times 365.25 \approx 74$ дни след 6 февруари. До края на февруари остават 22 дни. Към тях прибавяме 31 дни за март и получаваме 53 дни. До края на периода от 74 дни има $74 - 53 = 21$ дни. Така получаваме, че космическият автомобил ще бъде в своя афелий на 21 април 2019 г. На тази дата Слънцето трябва да се намира близо до границата на съзвездията Риби и Овен. Измерваме ъгъла "Слънце" – "Земя на 21 април" – "афелий на орбитата на автомобила (точка А)". Той се оказва приблизително 56°. Точката, в която ще виждаме автомобила от Земята е на 56° западно от Слънцето. Това са почти две зодиакални съзвездия, през които Слънцето вече е преминало. Следователно тя е близо до границата на съзвездията Козирог и Водолей, но с по-голяма вероятност във Водолей.



Определяме голямата полуос на първоначално предвидената орбита за космическия автомобил:

$$a_0 = \frac{0.99 + 1.7}{2} = 1.345 \text{ AU}$$

Пълната механична енергия на автомобила по такава орбита би била:

$$E_0 = -\frac{\gamma M m}{2a_0}$$

където M е масата на Слънцето, а m е масата на автомобила. Енергията на автомобила при движението му по реално получената орбита е:

$$E = -\frac{\gamma M m}{2a}$$

Накрая намираме енергията, придадена в повече от предвиденото от ракетните двиагели:

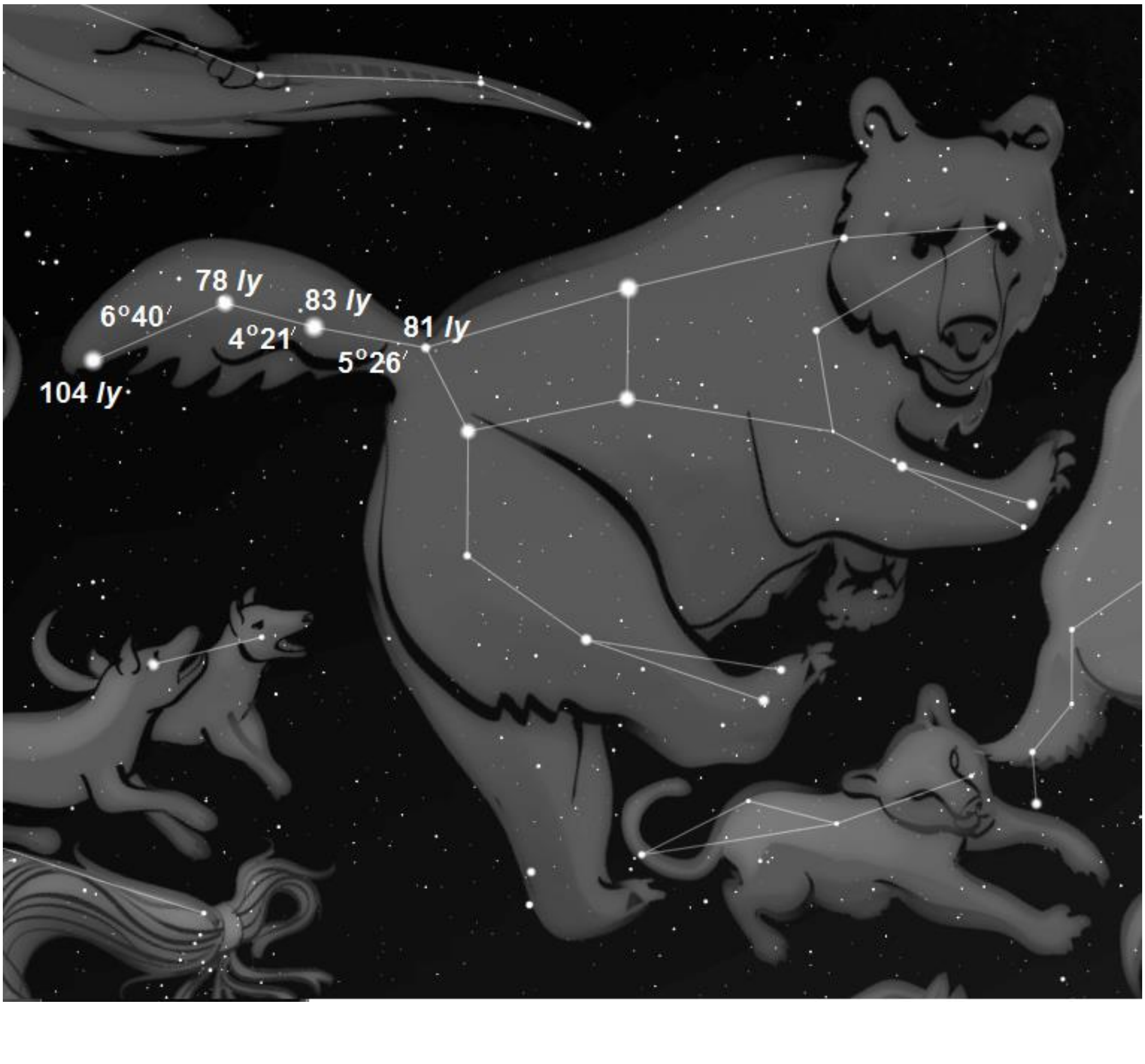
$$\Delta E = E - E_0$$

$$\Delta E = \frac{\gamma M m}{2}\left(\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a}\right)$$

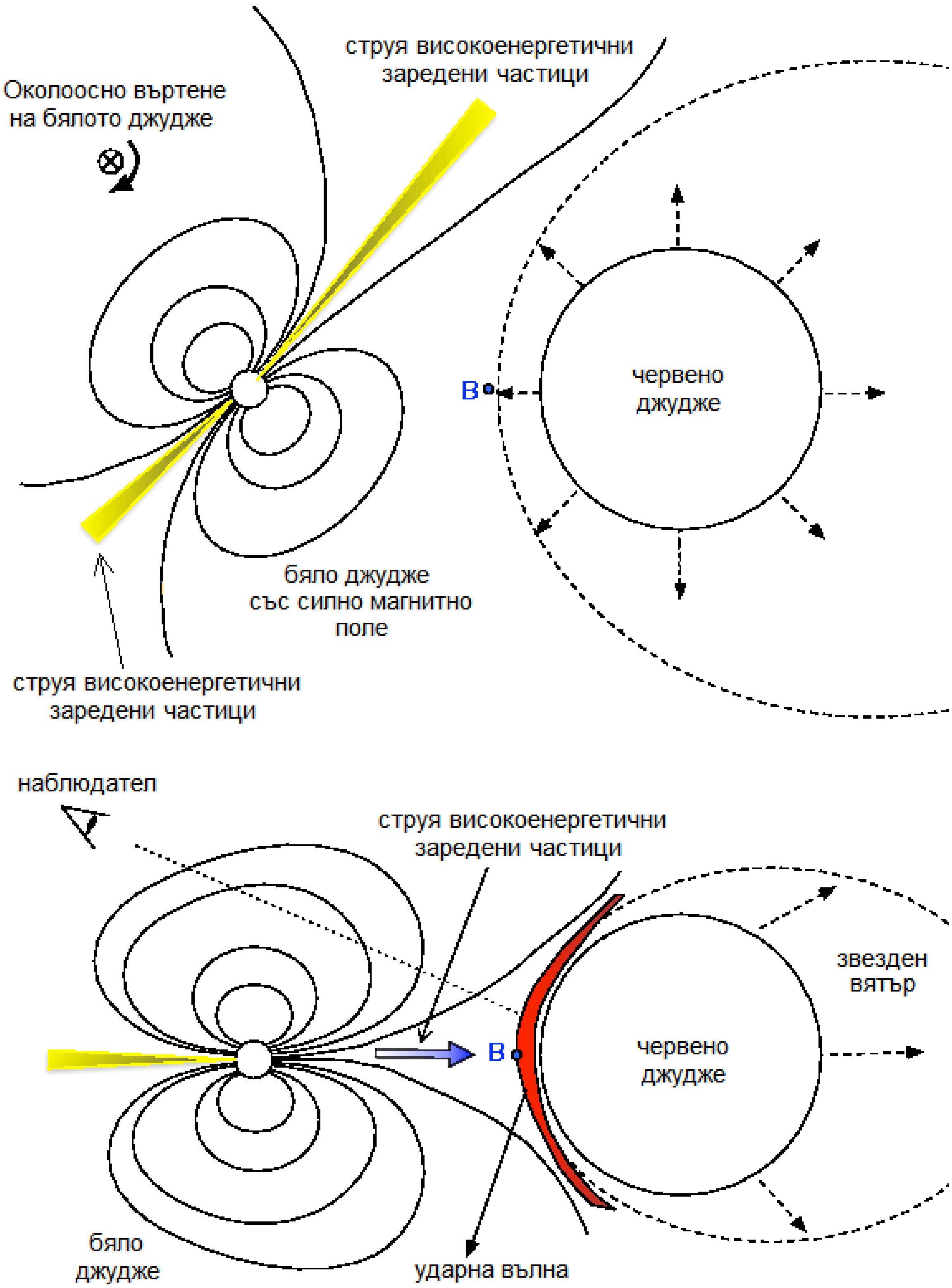
$$\Delta E \approx 10^{11} \text{ J}$$

<u>Критерии за оценяване (общо 15 т.):</u>
За намиране на голямата полуос на орбитата на автомобила – 1 т.
За намиране на периода – 2 т.
За пресмятане на времето, необходимо за достигане до афелия – 1 т.
За теоретично определяне на новото положение на Земята – 1 т.
За измерване и нанасяне на схемата – 2 т.
За правилен метод за определяне в кое съзвездие ще бъде автомобилът – 1 т.
За измерване и практическо приложение на метода – 2 т.
За правилно посочване на съзвездието, в коете ще е автомобилът – 1 т.
За пралилен метод за определяне на разликата в енергиите – 3 т.
За верен краен резултат – 1 т.

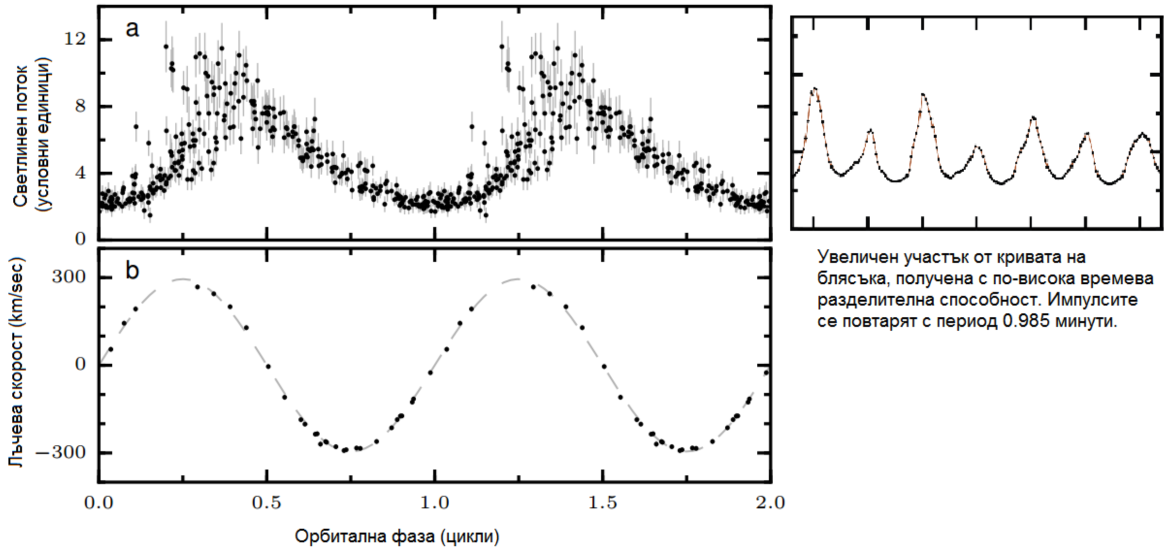
Справочни данни:
Гравитационна константа 6.67×10^{-11} $m^3 / kg.s^2$
Маса на Слънцето 2×10^{30} kg
Радиус на земната орбита 149.6×10^6 km



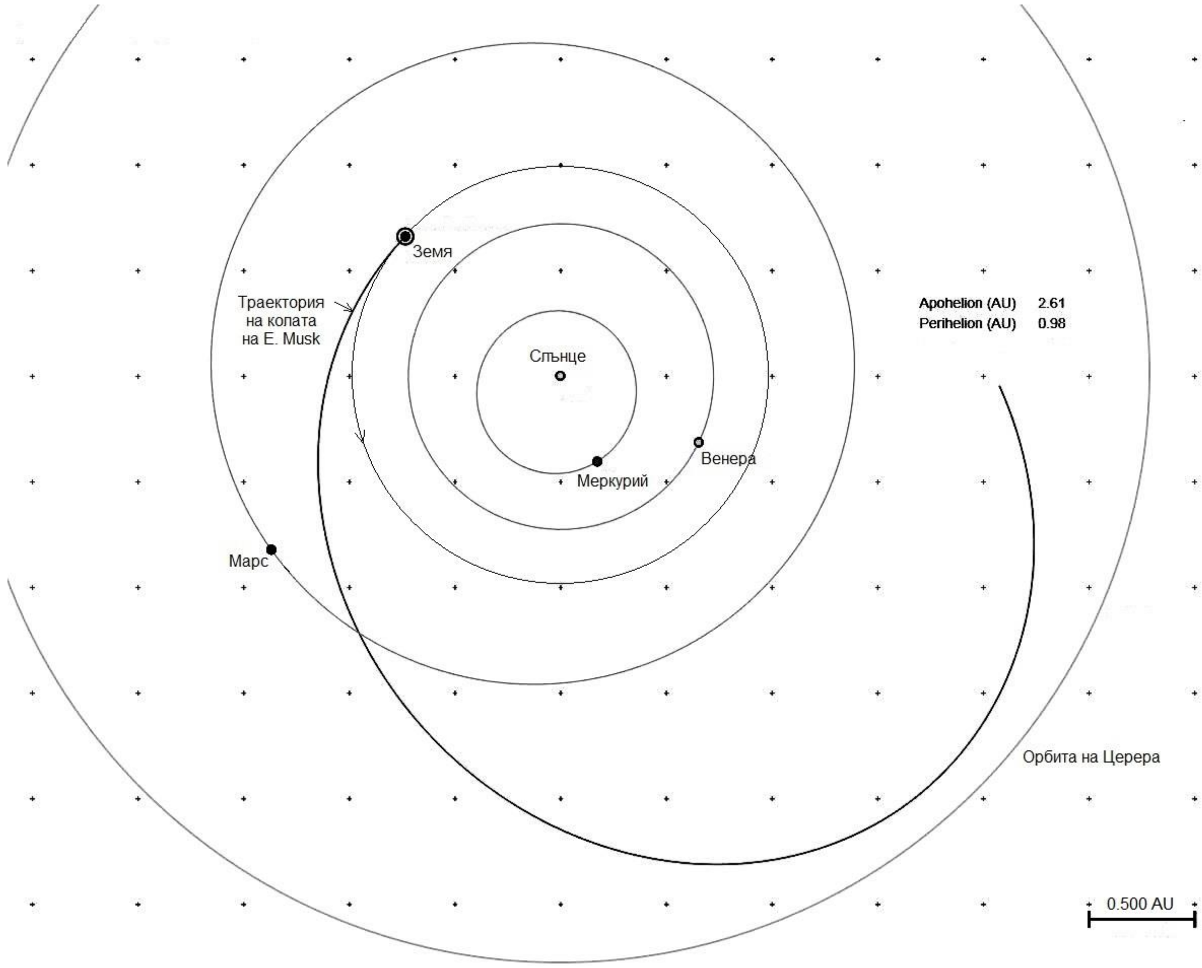
Фиг. 1. Разстояния в светлинни години до някои от звездите в съзвездието Голяма мечка и ъглови разстояния между тях – към 1 задача.



Фиг. 2. Модел на системата AR Sco – към 4 задача.



Фиг. 3. Крива на блясъка на AR Sco и крива на лъчевата скорост на червеното джудже – към 2 задача.



Фиг. 4. Орбита на автомобила на Elon Musk – към 4 задача.